Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen, Operationen und Strategien „verstehen“ – einige Grundlagen . . 1
1.1 „Verstehen“ und Grundvorstellungen 1
1.2 Verstehen untersuchen 2
1.3 Aufbau von Grundvorstellungen 3
1.4 Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen 4
1.5 Bedeutung der Prozessorientierung 5

2 Ist die Bruchrechnung heute noch nötig? 7
2.1 Die Bruchrechnung ist überflüssig – einige häufiger genannte Argumente 7
2.2 Die Bruchrechnung ist keineswegs überflüssig – einige ausgewählte Argumente 8
2.2.1 Anschauliche Fundierung des Dezimalbruchbegriffs mittels Brüchen 9
2.2.2 Einsichtige Fundierung des Rechnens mit Dezimalbrüchen mittels Brüchen 10
2.2.3 Prävention und Intervention bei Problembereichen der Dezimalbruchrechnung mittels Brüchen 10
2.2.4 Leichtere Begründung algebraischer Eigenschaften von $\mathbb{Q}^+$ mittels Brüchen 11
2.2.5 Wahrscheinlichkeitsrechnung 12
2.2.6 Gleichungslehre 14
2.2.7 Algebra 15
2.2.8 Reichhaltige und vielseitige Möglichkeiten zur Prozessorientierung 16
2.3 Resümee 16

3 Zur Einführung von Brüchen 17
3.1 Zentrale Grundvorstellungen 17
3.1.1 Einige Verwendungssituationen von Brüchen 17
3.1.2 Zwei zentrale Grundvorstellungen 21
3.1.3 Alternative Zugänge 22

3.2 Bruch als Anteil – zwei Teilaspekte 24
3.2.1 Teilaspekt 1 – Anteil eines Ganzen 24
3.2.2 Teilaspekt 2 – Anteil mehrerer Ganzer 28
3.3 Bruch als Anteil – zwei sachorientierte Bemerkungen 31
3.4 Schreibweisen und Repräsentanten 31
3.5 Bruchalbum und Stationenlernen – zwei innovative Ansätze 33
3.6 Drei Grundaufgaben 34
3.7 Anschauliche Vorkenntnisse zu Brüchen 36
3.8 Ein unterrichtlicher Zugang zu den Bruchzahlen 37
3.9 Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und Bruchzahlen . . . 38

4 Erweitern/Kürzen von Brüchen 41
4.1 Anschauliche Vorkenntnisse 41
4.2 Gleichwertige Brüche – anschauliche Zugangswege 43
4.3 Erweitern – systematische Behandlung 47
4.4 Kürzen – systematische Behandlung 48
4.5 Variationsreiches Üben 50
4.6 Mögliche Problembereiche und Hürden/ Prävention und Intervention 52
4.7 Vertiefung 54

5 Größenvergleich von Brüchen 55
5.1 Anschauliche Vorkenntnisse 55
5.2 Anschauliche Wege zum Größenvergleich 57
5.3 Systematische Behandlung 62
5.4 Variationsreiches Üben 63
5.5 Mögliche Problembereiche und Hürden 64
5.6 Prävention und Intervention 67
5.7 Vertiefung 70

6 Addition und Subtraktion von Brüchen 73
6.1 Anschauliche Vorkenntnisse 73
6.2 Grundvorstellungen und anschauliche Wege zur Addition und Subtraktion von Brüchen 74
6.3 Addition und Subtraktion – systematische Behandlung 78
6.4 Gemischte Zahlen 79
6.5 Variationsreiches Üben 80
6.6 Mögliche Problembereiche und Hürden 82
6.6.1 Grundvorstellungen und Rechenkalkül 83
6.6.2 Anschauliche Vorstellungen – oft Fehlanzeige 84
6.6.3 Schwierigkeitsfaktoren 85
6.6.4 Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick 86

6.6.5 Bruch plus Bruch/Bruch minus Bruch 87
6.6.6 Kombinierter Fall (Bruch und natürliche Zahl) 90
6.7 Prävention und Intervention 91
6.8 Vertiefung 94

7 Multiplikation von Brüchen 99
7.1 Anschauliche Vorkenntnisse 100
7.2 Anschauliche Wege zur Multiplikation 101
7.3 Natürliche Zahl mal Bruch – Grundvorstellung und systematische Behandlung 105
7.4 Bruch mal natürliche Zahl – Grundvorstellung und systematische Behandlung 106
7.5 Bruch mal Bruch – Grundvorstellungen und systematische Behandlung 108
7.5.1 Grundvorstellung: Anteil vom Anteil 108
7.5.2 Grundvorstellung: Flächeninhalt 110
7.5.3 Vergleich beider Wege 111
7.6 Variationsreiches Üben 112
7.7 Mögliche Problembereiche und Hürden 114
7.7.1 Multiplizieren vergrößert immer 114
7.7.2 Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick 115
7.7.3 Multiplikation gleichnamiger Brüche 116
7.7.4 Multiplikation ungleichnamiger Brüche 117
7.7.5 Natürliche Zahl mal Bruch/Bruch mal natürliche Zahl 117
7.7.6 Multiplikation gemischter Zahlen 118
7.7.7 Regelformulierung und Begründung 119
7.8 Prävention und Intervention 120
7.9 Vertiefung 121

8 Division von Brüchen 125
8.1 Anschauliche Vorkenntnisse 125
8.2 Anschauliche Wege zur Division 128
8.3 Bruch durch natürliche Zahl – Grundvorstellung und systematische Behandlung 133
8.4 Bruch durch Bruch/Natürliche Zahl durch Bruch – Grundvorstellungen und systematische Behandlung 134
8.4.1 Grundvorstellung Messen 134
8.4.2 Grundvorstellung Umkehroperation 135
8.4.3 Vergleich der beiden Wege 137
8.5 Natürliche Zahl durch natürliche Zahl 138
8.6 Variationsreiches Üben 139

8.7 Mögliche Problembereiche und Hürden 140
8.7.1 Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick 140
8.7.2 Bruch durch Bruch 141
8.7.3 Bruch durch natürliche Zahl/Natürliche Zahl durch Bruch . . 142
8.7.4 Natürliche Zahl durch natürliche Zahl 143
8.7.5 Grundvorstellungsumbrüche bei der Division 143
8.7.6 Division von Brüchen und praktische Anwendungen 144
8.7.7 Regelformulierung und Begründung 145
8.8 Prävention und Intervention 146
8.9 Vertiefung 148

9 Brüche und natürliche Zahlen – viele Gemeinsamkeiten, aber auch starke Umbrüche in den Grundvorstellungen 151

10 Resümee Brüche 155
10.1 Vorkenntnisse über Brüche überraschend gering 155
10.2 Gründliche Fundierung des Bruchbegriffs erforderlich 155
10.3 Grundvorstellungen sorgfältig erarbeiten 156
10.4 Mögliche Problembereiche und Hürden geschickt thematisieren 158
10.5 Variationsreiches Üben und Vertiefen 159

11 Prozessorientierter Zugang zu Dezimalbrüchen 161
11.1 Zur Bedeutung von Dezimalbrüchen 161
11.2 Vorteile der Schreibweise als Dezimalbruch 162
11.3 Zielsetzung des Dezimalbruchlehrgangs 163
11.4 Bedeutung der Prozessorientierung und Vernetzung 164
11.5 Grundvorstellungen aufbauen 165
11.6 Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen 166

12 Veranschaulichungen zu Dezimalbrüchen 167
12.1 Rolle von Anschauungsmitteln 167
12.2 Kriterien zur Auswahl von Arbeitsmitteln 168
12.3 Konkrete Arbeitsmittel für Dezimalbrüche 169
12.3.1 Zehnersystemblöcke/Dienes-Material 169
12.3.2 Lineare Arithmetikblöcke 169
12.3.3 Decimats 170
12.3.4 Millimeterpapierquadrate 170
12.3.5 Stellenwerttafeln 171
12.3.6 Zahlengerade 171
12.4 Arbeitsmittel sind nicht selbsterklärend 172
12.5 Vom konkreten Material zur Grundvorstellung 173
12.6 Übersetzen in Sachsituationen 174

13 Erweiterung des Stellenwertsystems 177
13.1 Stellenwerte und deren Zusammenhänge 177
13.2 Mögliche Problembereiche und Hürden 179
13.3 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 180

14 Darstellen, Lesen und Schreiben von Dezimalbrüchen 181
14.1 Brüche in Stellenwertschreibweise darstellen 181
14.2 Schreib- und Sprechweisen 182
14.3 Mögliche Problembereiche und Hürden 183
14.3.1 Probleme beim Übersetzen in eine nichtsymbolische Darstellung 183
14.3.2 Probleme beim Lesen und Schreiben 184
14.4 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 186
14.5 Variationsreiches Üben und Vertiefen 187

15 Erweitern und Kürzen bei Dezimalbrüchen 191
15.1 Verfeinern und Vergröbern einer Unterteilung 191
15.2 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 192

16 Größenvergleich und Anordnung bei Dezimalbrüchen 195
16.1 Wege zum Größenvergleich 195
16.1.1 Über die Stellenwerte an flächigen Veranschaulichungen . . . 195
16.1.2 Über die Zahlengerade 196
16.1.3 Über Größen 196
16.1.4 Über Stellenwerttafeln 196
16.1.5 Beispiel 196
16.1.6 Vergleich der verschiedenen Wege 196
16.2 Anordnung von Dezimalbrüchen 198
16.3 Mögliche Problembereiche und Hürden 198
16.3.1 Probleme beim Vergleichen von Dezimalbrüchen 198
16.3.2 Probleme bei der Anordnung von Dezimalbrüchen 201
16.4 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 201
16.5 Variationsreiches Üben und Vertiefen 203

17 Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalbrüchen 207
17.1 Umwandlung von Bruch- in Dezimalbruchschreibweise 207
17.2 Umwandlung von Dezimalbruch- in Bruchschreibweise 210
17.3 Mögliche Problembereiche und Hürden 211
17.4 Typische Fehlerstrategien bei der Umwandlung zwischen Dezimalbruch- und Bruchschreibweise 212
17.5 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 213

18 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen 215
18.1 Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion 215
18.2 Rechenstrategien und -methoden zur Addition und Subtraktion 216
18.3 Operative Additions- und Subtraktionsstrategien 217
18.4 Stellenweises Rechnen und schriftlicher Algorithmus 218
18.5 Weitere Strategien 220
18.5.1 Rechnen im kleinsten Stellenwert 220
18.5.2 Zehnerbrüche 221
18.5.3 Größen 221
18.6 Zusammenfassung und Bewertung 222
18.7 Lösungsquoten und -wege 223
18.8 Mögliche Problembereiche und Hürden 224
18.8.1 Stellenwertprobleme 224
18.8.2 Komma-trennt-Strategie 225
18.9 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 227
18.10 Variationsreiches Üben und Vertiefen 228

19 Multiplikation von Dezimalbrüchen 231
19.1 Grundvorstellungen zur Multiplikation 231
19.2 Multiplizieren von Stellenwerten 234
19.2.1 Multiplikation mit Zehnerpotenzen 234
19.2.2 Multiplikation mit Stellenwerten kleiner 1 235
19.3 Strategien zur Berechnung von Multiplikationstermen 236
19.3.1 Nutzen des Flächeninhalts am Rechteckmodell 236
19.3.2 Malkreuz 237
19.3.3 Größen 237
19.3.4 Rechnen mit Zehnerbrüchen 239
19.3.5 Rechnen mit kleinsten Stellenwerten 239
19.3.6 Regel zur Multiplikation von Dezimalbrüchen 239
19.3.7 Sonderfall: Multiplikation mit natürlichen Zahlen 240
19.4 Mögliche Problembereiche und Hürden 240
19.4.1 Gering ausgeprägte Grundvorstellungen 240
19.4.2 Fehlvorstellungen 241
19.4.3 Probleme bei Rechenstrategien 242
19.5 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 245
19.5.1 Diagnostische Aufgaben und Beobachtungsschwerpunkte . . 245
19.5.2 Fördervorschläge: Grundvorstellung und Grundvorstellungsumbruch Multiplikation 246
19.5.3 Fördervorschläge: Rechenstrategien 247
19.6 Variationsreiches Üben und Vertiefen 248

20 Division von Dezimalbrüchen 251
20.1 Grundvorstellungen zur Division 251
20.2 Strategien zur Division durch Dezimalbrüche 252
20.2.1 Anschauliche Division am Modell 252
20.2.2 Division über Zehnerbrüche 253
20.2.3 Rückgriff auf Größen 253
20.2.4 Umkehroperation 254
20.2.5 Gleichsinniges Verändern 254
20.3 Sonderfall: Division durch Zehnerpotenzen 256
20.4 Sonderfall: Divisionsstrategien Dezimalbruch geteilt durch natürliche Zahl 257
20.5 Mögliche Problembereiche und Hürden 258
20.5.1 Fehlende Grundvorstellungen 258
20.5.2 Fehlerstrategien 259
20.6 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 263
20.6.1 Diagnostische Aufgaben 263
20.6.2 Fördervorschläge 263
20.7 Variationsreiches Üben und Vertiefen 264
20.7.1 Wahl der Rechenoperation 264
20.7.2 Divisionsstrategien 265

21 Runden, Überschlagen und Schätzen 269
21.1 Runden 270
21.2 Überschlagen von Rechenausdrücken 271
21.3 Schätzen von Zahlen und Größen 272
21.4 Mögliche Problembereiche und Hürden 273
21.5 Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern 274
21.6 Variationsreiches Üben und Vertiefen 275

22 Resümee und Konsequenzen 277
22.1 Zielsetzung: Verstehen und Prozesse 277
22.2 Modelle: Tragfähigkeit statt Vielfalt 278
22.3 Inhalte: Zahlen statt Ziffern 279
22.4 Zahlvorstellungen im Stellenwertsystem 279
22.5 Vorwissen aufgreifen, gegenüberstellen, Umbrüche vollziehen 280
22.6 Probleme bei mangelnden Grundvorstellungen 281
22.7 Fehlerstrategien beim syntaktischen Arbeiten 281
22.8 Fehlvorstellungen 282
22.9 Diagnose: Erfassung von Prozessen 283

22.10 Förderung und Förderkonzepte 283
22.10.1 Aktivieren von Grundvorstellungen 283
22.10.2 Überwinden von Fehlvorstellungen 284
22.10.3 Fehlerstrategien erkennen und überwinden 285
22.11 Vernetzung: eine Herausforderung 286

Diagnostische Tests 289

Zitierte Literatur 291

Zitierte Schulbücher 305

Vertiefende Literatur 307

Bisher erschienene Bände der Reihe Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II 315